ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option économique 4 heures

exp désigne la fonction exponentielle et ln la fonction logarithme népérien.
L'exercice I est indépendant des exercices II et III.
Bien que liés, les exercices II et III peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre.

(I) Analyse

Soit f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels positifs par $f(x) = \exp\left[\frac{1}{x} \ln x\right]$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1. Etude de f

a) Montrer que f est continue en 0 et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (on donnera l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$ et la valeur de $f'(0)$).

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (l'étude de la concavité n'est pas demandée).
On prendra comme unité graphique 4 centimètres.

2. Calcul approché de $I = \int_0^1 f(x)dx$

a) par approximation de f par une fonction polynôme

1. Trouver un polynôme P_1 très simple de degré 2 tel que : $\forall x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ $P_1(x) = f(x)$.

2. Montrer, en le déterminant, qu'il existe un polynôme P unique de degré 4 tel que : $\begin{cases} \forall x \in \{0, 1\} \quad P(x) = f(x) \text{ et } P'(x) = f'(x) \\ P\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$
(on aura intérêt à introduire le polynôme $Q = P - P_1$).

3. Tracer, sur le graphique demandé au 1.b., la courbe représentative de la restriction de la fonction polynôme P à l'intervalle $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

4. Calculer $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} P(x)dx$, première valeur approchée de I.

b) par la méthode des rectangles

On note, pour $n \geq 2$: $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}$

1. Montrer, en utilisant une subdivision régulière de [0,1], que :

$$u_n \leq \int_0^1 f(x)dx \leq u_n + \frac{1}{n}$$

2. En déduire une deuxième valeur approchée I_2 de I à 0,02 près (on donnera la valeur de n utilisée).

(II) Algèbre

On associe à tout nombre réel p la matrice $A(p) = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A(p)$ admet des valeurs propres réelles si et seulement si p appartient à l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

On suppose dans tout ce qui suit que p appartient à I et l'on note q et r les valeurs propres distinctes ou non de la matrice $A(p)$.

2. a) que valent $p + q + r$? $pq + qr + rp$?

b) En déduire les valeurs propres des matrices $A(q)$ et $A(r)$, et que q et r appartiennent également à l'intervalle I.

c) Donner la dimension et une base du sous espace propre de $A(p)$ associé à la valeur propre q.

Pour quelles valeurs de $p \in I$, $A(p)$ est-elle diagonalisable ?

3. On suppose dans cette question seulement que $p = \frac{2}{3}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left[A\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & \frac{2}{9} a_n \\ a_n & \frac{2}{9} a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4. Soient f et g les deux applications de I dans $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall p \in I$ $f(p) = \text{Sup}(q, r)$ $g(p) = \text{Inf}(q, r)$

a) Etudier les variations de f et de g.

b) Tracer les deux courbes représentatives dans le même repère orthonormé (on prendra comme unité graphique 6 cm).

Quelles remarques géométriques peut-on faire sur la figure obtenue ?

(III) Probabilités et suites

On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule dans une urne contenant deux boules blanches et une boule noire.

On note : B l'événement : "tirage d'une boule blanche"
N l'événement : "tirage d'une boule noire"
E l'événement : "tirage de deux boules blanches consécutives", le tirage d'une boule blanche ne pouvant servir qu'une fois à la réalisation de E. Plus précisément, on dit que E est réalisé au rang k ($k \geqslant 2$), si les $(k-1)^e$ et k^e tirages correspondent à la réalisation de B et que E n'est pas réalisé au $(k-1)^e$ tirage.

Exemple : Dans le cas où les 16 premiers tirages sont les suivants :

Numéro du tirage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Evènement réalisé	B	N	B	B	B	B	N	B	B	B	N	B	N	B	B	N
				↑		↑			↑						↑	

On dit que E est réalisé aux rangs 4, 6, 9, 15 mais non réalisé aux rangs 5 ou 10.

1. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que : $\forall n \geqslant 1$ u_n désigne la probabilité de réalisation de E au rang n.

a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad u_n = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} u_{n-1}$

(On pourra par exemple remarquer que, si l'on tire une boule blanche au rang (n-1) et encore une boule blanche au rang n, E est nécessairement réalisé au rang (n-1) ou au rang n).

b) En déduire la valeur de u_n pour $n \geqslant 1$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

c) On suppose $n \geqslant 1$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où E se réalise en n tirages et, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si E réalisé au $k^{ème}$ tirage sinon la valeur 0.

Exprimer X en fonction de X_1, X_2, ..., X_n.

En déduire $E(X)$ espérance mathématique de X.

2. Etude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telle que : $\forall n \geqslant 1$ v_n désigne la probabilité de réalisation de E pour la première fois au rang n.

a) Calculer v_1 et v_2.

b) On suppose $n \geqslant 3$. En remarquant que le premier tirage correspond soit à une noire, soit à une blanche (en quel cas il en va de même du 2^e tirage), déterminer une relation de récurrence entre v_n, v_{n-1} et v_{n-2}.

c) Déterminer une matrice carrée B d'ordre 2 à coefficients réels telle que :

$$\forall n \geqslant 3 \quad \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$$

En déduire que $\begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = B^{n-2} \begin{pmatrix} 4/9 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Vérifier que la matrice B n'est autre que la matrice $A(\frac{2}{3})$ de l'exercice (II).

En utilisant, sans le démontrer, le résultat donné dans l'exercice (II). 3°, calculer v_n pour $n \geqslant 1$.

e) Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$?

3. Etude du rang aléatoire Y où E est réalisé pour la première fois

a) Calculer l'espérance mathématique de Y.

b) Calculer la variance de Y.